$1/f$ et ondelettes

Patrick Flandrin

École Normale Supérieure de Lyon
Laboratoire de Physique (URA 1325 CNRS)
46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07
flandrin@physique.ens-lyon.fr

RÉSUMÉ

Des comportements spectraux "en $1/f$" peuvent être observés dans un grand nombre de domaines très variés. Les problèmes (de modélisation, d'analyse et de traitement) que de telles observations soulèvent peuvent cependant être de nature très différente et se relier, suivant les cas, à des concepts comme l'auto-similarité, la fractalité ou encore la longue dépendance. Le dénominateur commun de ces notions étant l'idée d'invariance d'échelle, la transformation en ondelettes est naturellement amenée à jouer un rôle-clé dans l'appréhension des processus "en $1/f$".

ABSTRACT

Empirical "$1/f$" spectra can be observed in a wide variety of different fields. This raises problems (related to modeling, analysis and processing) which may be of a very different nature and which can be phrased in terms of either self-similarity, fractality or long-range dependence. Since the common feature of those different notions is the idea of scale invariance, wavelets naturally happen to play a key role in the handling of "$1/f$" processes.

1 Introduction

On a pu ces dernières années observer un engouement de plus en plus grand pour l'étude des processus présentant des spectres en loi de puissance ("en $1/f$"). La raison en est à la fois que de tels processus apparaissent dans des domaines très variés (allant de l'hydrologie à la finance, en passant par les télécommunications, la turbulence et bien d'autres domaines encore [9]) et que leur étude pose des problèmes (de modélisation, d'analyse et de traitement) pour lesquels peu d'outils étaient disponibles jusqu'à un passé récent [5]. Il n'est pas question ici de dresser un panorama exhaustif des problématiques mises en jeu, ni de faire une synthèse un tant soit peu complète sur les différentes approches possibles qui ont pu être développées, encore moins sur leurs intérêts respectifs. Le propos de ce texte est d'ambition beaucoup plus modeste : il se propose essentiellement d'insister sur le fait que la notion d'invariance d'échelle est sous-jacente au problème et de justifier pourquoi (et comment) les analyses en ondelettes sont naturellement amenées à jouer un rôle central dans ces questions. Les résultats évoqués sont pour la plupart issus d'un effort entrepris depuis maintenant plusieurs années, en collaboration essentielle avec Patrice Abry, Paulo Gonçalvès et Darryl Veitch, qu'il m'est agréable de remercier ici.

2 Trois régimes

L'idée de spectre en $1/f$ recouvre les situations où, étant donné un signal temporel observé, sa densité spectrale de puissance empirique se comporte en $\mathcal{S}(f) = C/|f|^\alpha$, avec $\alpha > 0$. D'un point de vue pratique, c'est évidemment la forme équivalente

$$\log \mathcal{S}(f) = \log C - \alpha \, \log |f|$$

qui est la plus parlante, le caractère $1/f$ se traduisant par une droite en coordonnées log-log.

Dans le cas d'observations physiques, parler de comportement spectral en $1/f$ n'a généralement de sens que relativement à une bande d'analyse. Si l'on convient d'introduire sur la demi-droite des fréquence positives deux fréquences (arbitrairement variables) f_{bf} et f_{hf} telles que $0 < f_{bf} < f_{hf} < +\infty$, on est conduit à une classification en trois régimes selon que l'on observe le comportement en $1/f$ dans l'une (au moins) des trois régions que cette partition définit. Considérons chacun des cas :

1. $f_{bf} \leqslant f \leqslant f_{hf}$: on est là dans une situation où, dans un domaine passe-bande, on observe simplement une décroissance algébrique sans fréquence prédominante ;
2. $f_{hf} \leqslant f \leqslant \infty$: le caractère $1/f$ est prépondérant dans la limite des hautes fréquences et sa manifestation la plus directe concerne la régularité locale des trajectoires et leur fractalité ;
3. $0 \leqslant f \leqslant f_{bf}$: la loi de puissance du spectre intervient ici dans la limite des basses fréquences et il en résulte une divergence à l'origine, ce qui, si $\alpha < 2$, conduit à une décroissance algébrique de la fonction de corrélation suffisamment lente pour qu'elle ne soit pas sommable : il y a longue dépendance.

Ces trois régimes recouvrent en fait des réalités de nature différente et n'ont aucune raison de se manifester de façon simultanée. Leur dénominateur commun est d'être tous trois liés à une idée commune d'invariance d'échelle, selon laquelle

— dans une gamme d'échelles et à une renormalisation près — les propriétés du tout sont semblables à celles de ses parties (auto-similarité).

D'une manière plus précise, on dit qu'un processus $x(t)$ est (statistiquement) auto-similaire d'index H si on a l'égalité en distribution :

$$\{x(kt)\} \stackrel{d}{=} k^H \{x(t)\}$$

pour tout $k > 0$. On peut noter que si un processus est auto-similaire, il est nécessairement non stationnaire. Néanmoins, si un processus auto-similaire d'index H possède des accroissements stationnaires, sa fonction de corrélation décroît asymptotiquement en $\tau^{2(H-1)}$, comportement qui (qualitativement) induit une divergence spectrale d'exposant $1-2H$ à l'origine.

3 Un modèle simple

Le modèle de processus auto-similaire le plus simple et le plus utilisé est celui du mouvement Brownien fractionnaire (fBm), caractérisé par son exposant de Hurst H ($0 < H < 1$). Par définition, un fBm est un processus gaussien centré $\{B_H(t), t \in \mathbf{R}; B_H(0) = 0\}$, à accroissements stationnaires et tel que sa fonction de covariance s'écrit

$$\mathbf{E}B_H(t)B_H(s) = \frac{\sigma^2}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Il résulte de sa définition que le fBm a un spectre moyen $\mathcal{S}_{B_H}(f) = \sigma^2/|f|^{2H+1}$ et il est facile aussi de se convaincre qu'il est auto-similaire d'index H.

Il se trouve ainsi que le fBm présente l'avantage (ou l'inconvénient) d'être globalement auto-similaire sur tout l'axe des fréquences, le seul paramètre H rendant compte, suivant les besoins, de l'un ou l'autre des trois régimes pré-cités. Du point de vue de la modélisation, le fBm apparaît donc comme un point de départ particulièrement intéressant (comme cela peut être le cas du bruit blanc gaussien dans des contextes stationnaires), mais cette simplicité (le fBm est le seul processus gaussien à accroissements stationnaires et auto-similaire) est évidemment à payer d'un prix en terme de réalisme dès lors qu'il faut considérer des données réelles.

4 Pourquoi des ondelettes ?

Qui dit auto-similarité dit invariance d'échelle, et qui dit invariance d'échelle suggère naturellement de recourir à une analyse adaptée qui soit à même de décrire un signal relativement à plusieurs échelles et de mettre ces descriptions en relation entre elles de façon à faire ressortir d'éventuels invariants : c'est évidemment ce que permet la transformation en ondelettes [6].

Sans entrer dans les détails, on peut se restreindre ici au cas des décompositons orthonormales dyadiques et se contenter de la vision selon laquelle une décomposition en ondelettes réalise essentiellement une analyse multirésolution permettant, à un niveau de résolution quelconque, de considérer un signal comme superposition d'une approximation à une résolution plus grossière et d'un détail qui lui soit "orthogonal". Les coefficients d'ondelettes sont ainsi des coefficients de détail (ou de différence d'information), obtenus à l'échelle 2^j ($j \in \mathbf{Z}$) par la relation de projection

$$d_x[j,n] = 2^{-j/2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\psi(2^{-j}t-n)\,dt,$$

où la fonction $\psi(t)$ (l'ondelette-mère) est telle que la famille $\psi_{jn}(t) = \{2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-n), (n,j) \in \mathbf{Z}^2\}$ soit une base de $L^2(\mathbf{R})$.

Ce faisant, l'analyse en ondelettes du fBm se révèle particulièrement pertinente lorsqu'on la met à l'épreuve des trois propriétés importantes mises en avant précédemment [7] :

1. bien que le fBm soit non stationnaire, la fonction de covariance de ses détails est (à échelle fixée) de la forme :

$$\mathbf{E}d_{B_H}[j,n]d_{B_H}[j,m] = \frac{\sigma^2}{2}\, f_H[n-m]\,(2^j)^{2H+1},$$

ce qui prouve en fait la capacité de la transformée à stationnariser un processus à accroissements stationnaires, échelle par échelle ;

2. bien que la divergence spectrale du fBm à l'origine puisse induire sur ses accroissements de la longue dépendance si $H < 1/2$, une ondelette à $\mathcal{N}$ moments nuls ($\mathcal{N} > H + 1/2$) garantit que

$$f_H[k] \sim O\left(|k|^{2(H-\mathcal{N})}\right), k \longrightarrow +\infty,$$

ce qui montre sa capacité à diminuer la corrélation dans l'espace transformé et à faire disparaître, à échelle fixée, la longue dépendance (celle-ci étant rejetée dans l'approximation résiduelle à la résolution plus grossière) ;

3. le fBm étant un processus auto-similaire d'index H, ses coefficients d'ondelettes forment un champ lui-même auto-similaire d'index ($H + \frac{1}{2}$) :

$$d_{B_H}[j,n] \stackrel{d}{=} (2^j)^{(H+\frac{1}{2})} d_{B_H}[0,n],$$

ce qui permet une mise en évidence de l'auto-similarité par la relation très simple :

$$\log_2 \mathbf{E}d^2_{B_H}[j,n] = (2H+1)j + C.$$

D'un point de vue d'estimation (en l'occurrence de l'index H), il ressort de ce qui précède que la quantité-clé à évaluer est la variance des détails et sa dépendance en tant que fonction de l'échelle. D'une manière générale, qui dépasse le cadre strict du fBm, on peut justifier et revenir sur le lien naturel existant entre spectres en $1/f$ et ondelettes en usant de l'argument semi-qualitatif selon lequel un processus $x(t)$ de densité spectrale $S_x(f)$ est tel que

$$\mathbf{E}d^2_x[j,n] = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(2^j f)|^2\, S_x(f)\, df.$$

Dans le cas où, précisément, $S_x(f)$ se comporte en $1/f^\alpha$, on obtient (en supposant $R > (\alpha-1)/2$)

$$\mathbf{E}d^2_x[j,n] = 2^{j\alpha}.\left(\sigma^2_x \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^{-\alpha}\,|\Psi(f)|^2\, df\right),$$

ce qui illustre l'adaptation structurelle de l'analyse aux données, dans la mesure où le biais multiplicatif intervenant dans la variance disparaît naturellement lorsque l'on cherche à estimer α par régression linéaire dans un diagramme log-log.

Les différents ingrédients évoqués pr :Õecédemment peuvent maintenant être combinés pour construire des estimateurs efficaces de H à partir d'analyses en ondelettes [1] :

1. les deux propriétés de stationnarité et de quasi-décorrélation permettent l'utilisation d'un estimateur de variance empirique standard. Plus précisément, si l'on dispose de N_0 points de données et si l'on pose $N_j = 2^{-j}N_0$, la variance théorique $v[j]$, supposée se comporter comme $v[j] \equiv \mathbf{E}d_x^2[j,n] = C.2^{j\alpha}$ peut s'estimer par
$$\widehat{v}[j] \equiv \frac{1}{N_j}\sum_{n=1}^{N_j} d_x^2[j,n];$$
2. en prenant $\mathcal{N}$ assez grand, on montre que le log-scalogramme normalisé
$$\eta[j] \equiv \log_2(\widehat{v}[j]/\mathbf{E}d_x^2[j,n])$$
a pour densité de probabilité asymptotique
$$p(\eta[j]) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0, \frac{2^{j+1}}{N_0\ \ln^2 2}\right);$$
3. on en déduit que la variance sur l'estimation de α, basée sur J échelles consécutives, est telle que :
$$\mathrm{var}(\widehat{\alpha}) \overset{J\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{N_0\ \ln^2 2},$$
ce qui garantit l'efficacité asymptotique de l'estimateur.

5 Des généralisations

L'analyse en ondelettes du fBm et, plus généralement, d'un processus en $1/f$ présente l'avantage de fournir un cadre unificateur qui à fois englobe (en les généralisant) des techniques déjà connues et permet d'en accroître le champ potentiel d'application au-delà du cadre strict dont elle est issue.

Allan [7]. Ainsi, en ce qui concerne les techniques d'analyse elles-mêmes, l'approche en ondelettes revient essentiellement à raffiner et rendre plus robustes des approches (de type "variogramme") basées sur la propriété centrale des accroissements $\mathbf{E}(B_H(t+\tau) - B_H(t))^2 = \sigma^2|\tau|^{2H}$. Pour intuitif qu'il soit, ce point de vue se heurte cependant à des difficultés liées, par exemple, à l'estimation d'une variance en présence de longue dépendance. Ceci a conduit au développement d'estimateurs de variance plus évolués que l'estimateur empirique standard, comme par exemple la variance de Allan, définie par
$$V_x(T) = \frac{1}{2T^2}\,\mathbf{E}\left[\int_{t-T}^{t} x(s)\,ds - \int_{t}^{t+T} x(s)\,ds\right]^2$$
et dont on peut montrer qu'elle est telle que
$$V_{B_H}(T) \sim O(T^{2H})$$
lorsque $T \to +\infty$. Il est alors remarquable de noter qu'une telle quantité admet naturellement une interprétation en ondelettes via le système de Haar :
$$V_{B_H}(2^{j-1}) = C(j).f_H^{(Haar)}[0],$$
ce qui permet d'en accroître l'efficacité en remplaçant le système de Haar par une base mieux adaptée.

Agrégation [4]. Dans une perspective très similaire, il est d'usage d'aborder l'analyse de séries à longue dépendance par une technique, dite d'agrégation, qui consiste, pour un processus à temps discret $x[n]$ à le recomposer suivant la règle
$$x[n] \longrightarrow x^N[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=(n-1)N+1}^{nN} x[k].$$

Un point-clé de cette approche est que, lorsqu'on le renormalise par N^{H-1}, le processus d'accroissement du fBm est invariant par une telle opération d'agrégation, ce qui permet (pour un processus quelconque) de définir une notion d'auto-similarité asymptotique à partir d'un tel critère d'invariance dans la limite des grands N. Là encore, un éclairage en ondelettes est immédiat et l'on peut montrer que

1. les données agrégées sur des intervalles dyadiques s'identifient à des approximants de Haar ;
2. les propriétés d'auto-similarité asymptotique restent valables lorsque l'on remplace les coefficients d'approximation par ceux de détails ;
3. tout comme pour la variance de Allan, considérer des ondelettes plus générales que le système de Haar permet d'améliorer l'analyse (augmenter par exemple le nombre $\mathcal{N}$ de moments nuls permet simultanément une meilleure décorrélation des coefficients et une plus grande insensibilité aux tendances).

Fano [2]. En ce qui concerne les processus analysés, il est également possible de sortir du cadre strict de la gaussiannité, telle qu'elle est imposée par le modèle du fBm. Ainsi, il existe nombre d'applications présentant des caractéristiques liées à l'auto-similarité et/ou à la longue dépendance, et dont la structure des données est naturellement de type processus ponctuel. Dans un tel cas, les processus à considérer sont du type
$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - t_k),$$
expression dans laquelle les instants t_k sont distribués avec une loi de Poisson de densité $\lambda(t)$ (supposée stationnaire), et où les propriétés "en $1/f$" peuvent être induites par $\lambda(t)$ et/ou le filtre $g(t)$.

Si l'on se contente du cas le plus simple pour lequel $g(t) = \delta(t)$ et $\lambda(t) = \varepsilon_\lambda + \delta B_H(t)$, on obtient
$$S_P(f) - \varepsilon_\lambda - \varepsilon_\lambda^2\,\delta(f) \sim |f|^{1-2H}$$
dans la limite des basses fréquences. Dans le cas d'un processus de Poisson ordinaire ($\partial\lambda(t)/\partial t = 0$), le processus de comptage associé $N(.)$ serait tel que $\mathrm{var}N(T) = \mathbf{E}N(T)$ pour

tout T. Ceci suggère d'introduire comme statistique de test (de déviation par rapport à Poisson) le "facteur de Fano," défini par

$$F(T) \equiv \frac{\text{var}N(T)}{\mathbf{E}N(T)},$$

quantité qui, dans le cas qui nous intéresse, est effectivement telle que

$$F(T) = 1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_\lambda} T^{2H-1}$$

et donc met en évidence la déviation recherchée dans la limite des grands intervalles d'observation.

Dans la mesure où le facteur de Fano est à la base une comparaison entre des fluctuations et des moyennes sur des intervalles de temps de plus en plus grands, il est là-aussi naturel d'en proposer une définition en ondelettes du type

$$WF(j) \equiv (2^j)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{E}d_P^2[j,n]}{\mathbf{E}a_P[j,n]}.$$

Ce faisant, et tout en préservant l'esprit de l'approche initiale, on bénéficie en outre d'une souplesse accrue dans l'utilisation de l'outil. Plus précisément,

1. la relation d'écart à Poison devient simplement

$$WF(j) \sim 1 + C.(2^j)^{2H-1}$$

dans la limite des grands j, ce qui ramène à la structure d'estimation déjà considérée ;

2. on a l'équivalence explicite

$$WF^{(Haar)}(j) = F^{(Allan)}(2^j),$$

ce qui, comme précédemment, permet de généraliser l'approche au-delà de Haar si $\mathcal{N} > 0$;

3. un nombre plus grand encore de moments nuls permet de rendre l'analyse "aveugle" à des tendances polynômiales (jusqu'à un degré $\mathcal{N} - 1$ pour $\mathcal{N}$ moments nuls) ;
4. il est possible d'appliquer directement l'analyse à des observations filtrées, sans nécessairement recourir à l'extraction préliminaire du processus ponctuel sous-jacent.

6 Conclusion

L'objectif de ce texte était de commenter quelques-unes des facettes que peut recouvrir le vocable "$1/f$" et de montrer en quoi une approche à base d'ondelettes pouvait aider à une meilleure analyse de tels processus. Même dans ce cadre, bien des points ont été passés sous silence et nombre de développements récents n'ont pu apparaître. Ainsi, au niveau des techniques d'estimation elles-mêmes, des résultats plus fins que ceux mentionnés brièvement ici ont été obtenus récemment par P. Abry et D. Veitch, par exemple pour le problème très important de l'estimation conjointe de l'index d'auto-similarité et de la puissance du processus [8]. Ce point peut en fait revêtir une importance cruciale dans des applications comme l'analyse du télétrafic (type Ethernet ou Internet) car, si l'identification de l'index permet de mettre en évidence une éventuelle longue dépendance dans le trafic, c'est la puissance associée qui mesure l'importance de son effet [3].

Références

[1] P. Abry, P. Gonçalvès and P. Flandrin, "Wavelets, spectrum analysis and $1/f$ processes," in *Wavelets and Statistics*, Lecture Notes in Statistics **103**, pp. 15–29, 1995.

[2] P. Abry, P. Flandrin, "Point processes, long-range dependence and wavelets," in *Wavelets in Biology and Medicine*, CRC Press, pp. 413–437, 1996.

[3] P. Abry, D. Veitch, "Wavelet analysis of long-range dependent traffic," *IEEE Trans. on Info. Theory*, to appear 1997.

[4] P. Abry, D. Veitch and P. Flandrin, "Long-range dependence : revisiting aggregation with wavelets," *J. Time Series Anal.*, to appear 1997.

[5] J. Beran, *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman and Hall, 1994.

[6] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.

[7] P. Flandrin, "Wavelet analysis and synthesis of fractinal Brownian motion," *IEEE Trans. on Info. Theory*, **IT-38** (2), pp. 910–917, 1992.

[8] D. Veitch, P. Abry, "Estimation conjointe en ondelettes des paramètres du phénomène de dépendance longue," Coll. GRETSI, 1997.

[9] G.W. Wornell, *Signal Processing with Fractals — A Wavelet-Based Approach*, Prentice-Hall, 1996.